## 2.9.1 Exponenciální funkce

**Předpoklady:** 2714

Funkce, které už známe:

- $y = x$, $y = x^2$, $y = x^5$, ….
- $y = x^{-1} = \frac{1}{x}$, $y = x^{-2} = \frac{1}{x^2}$, $y = x^{-4} = \frac{1}{x^4}$, …
- $y = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$, $y = x^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{x}$, … ($\sqrt{9} = 3$, protože $3^2 = 9$. Odmocnina je inverzní k mocnině a proto ověřujeme hodnoty odmocnin pomocí mocnění)
- $y = x^{\frac{7}{4}} = \sqrt[4]{x^7}$, $y = x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$, …
- Dokázali bychom spočítat s libovolnou přesností i $y = x^{\sqrt{2}}$ ( $\sqrt{2} \doteq 1,414...$ $\Rightarrow$ počítali bychom $y = x^{\frac{14}{10}}$, $y = x^{\frac{141}{100}}$, $y = x^{\frac{1414}{1000}}$, atd…).

Když to shrneme:

- U všech uvedených funkcí měníme číslo *x*, které umocňujeme (základ mocniny, mocněnec), číslo, na které umocňujeme (exponent, mocnitel), zůstává stejné.
- Umíme umocnit na libovolné reálné číslo.

$\Rightarrow$ Zkusíme to obrátit. Pořád stejné číslo (třeba dvojku) budeme umocňovat na různá čísla (*x*)
$\Rightarrow$ získáme funkci $y = 2^x$.

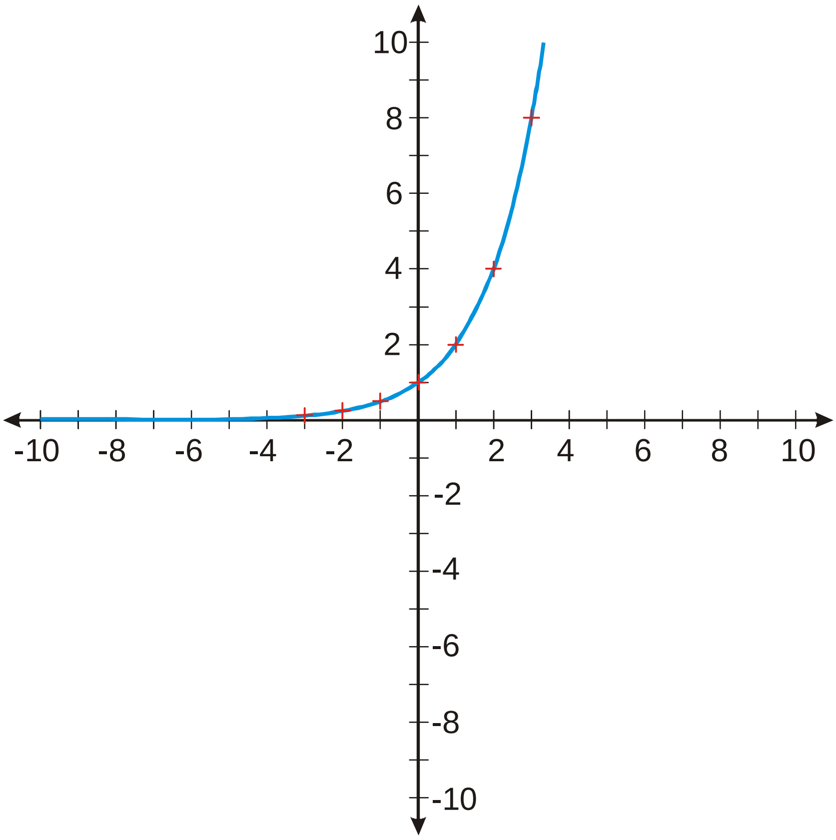
Protože dokážeme umocnit na libovolné reálné číslo, bude $D\left(2^x\right) = R$.

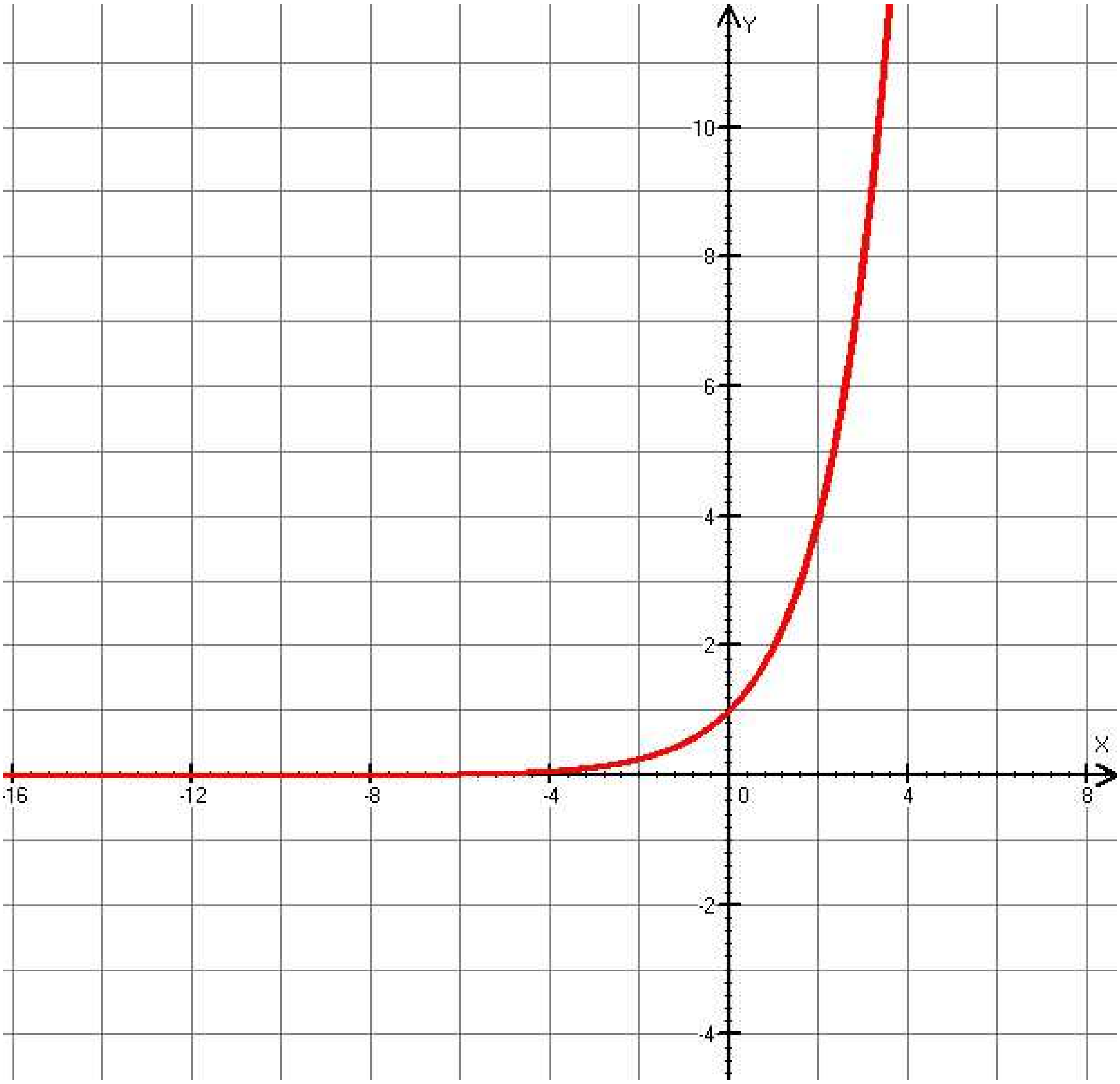
**Př. 1:** Sestroj graf funkce $y = 2^x$ a urči její vlastnosti.

Na sestrojení grafu potřebujeme určit několik bodů $\Rightarrow$ vyplníme tabulku hodnot.

| ***x*** | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ***y*** | $2^{-3} = \frac{1}{8}$ | $2^{-2} = \frac{1}{4}$ | $2^{-1} = \frac{1}{2}$ | $2^0 = 1$ | $2^1 = 2$ | $2^2 = 4$ | $2^3 = 8$ |

Graf funkce $y = 2^x$


10
8
6
4
2
-10
-8
-6
-4
-2
2
4
6
8
10
-2
-4
-6
-8
-10




Vlastnosti funkce $y = 2^x$:

- $D(f) = R$ (dvojku dokážeme umocnit na cokoliv)
- $H(f) = (0;\infty)$ (výsledky umocňování dvojky musí být vždy kladné, protože umocňujeme kladné číslo)
- Funkce je rostoucí v *R*.
- Funkce je zdola omezená, není shora omezená, nemá maximum ani minimum.
- Funkce není ani lichá ani sudá.
- Funkce prochází bodem $[0;1]$ (proč je to důležité, uvidíme příští hodinu).

**Pedagogická poznámka:** Zadání příkladu 1 schválně neobsahuje konkrétní specifikaci toho, jak mají žáci úkol splnit. V hodině příliš dlouho nečekám a bezradné žáky směřuji k tabulce.

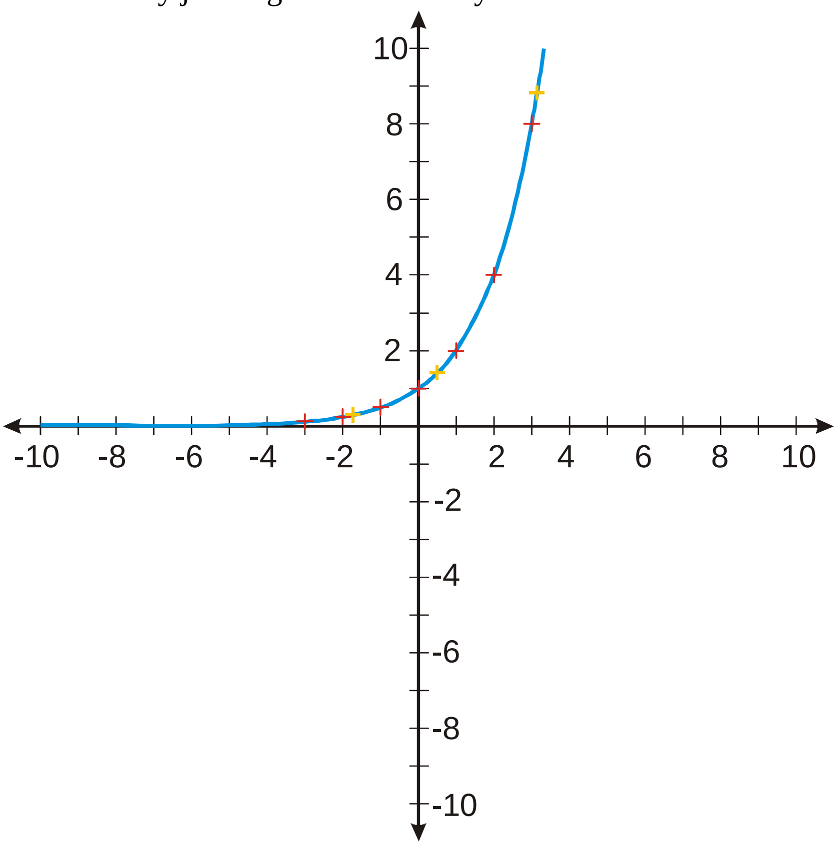
**Pedagogická poznámka:** Bohužel se skoro s jistotou objeví několik jedinců, kteří zapomněli na umocňování a budou počítat $2^{-1} = -2$, $2^{-2} = -4$,… Je potřeba je rychle odhalit a zlikvidovat.

**Př. 2:** Doplň do tabulky hodnoty funkce $y = 2^x$ pro $x$ uvedená v tabulce. Pro každou hodnotu $x$ nejprve odhadni hodnotu $y$ a poté ji urči pomocí kalkulátoru s přesností na tři desetinná čísla. Získané hodnoty využij k zakreslení do grafu funkce.

| $x$ | $\frac{1}{2}$ | $\pi$ | $-\sqrt{3}$ |
|---|---|---|---|
| $y$ | | | |

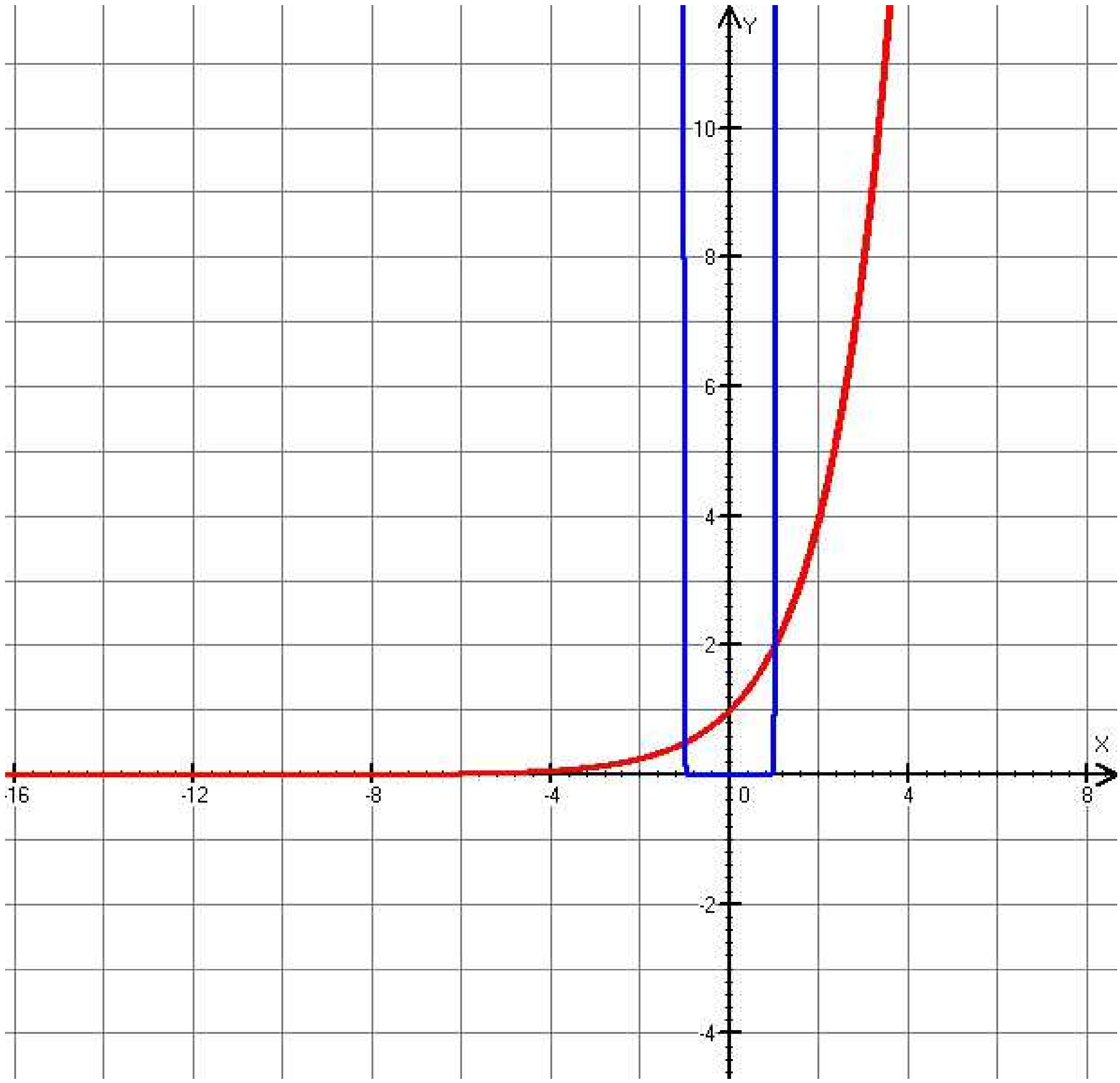
| $x$ | $\frac{1}{2}$ | $\pi$ | $-\sqrt{3}$ |
|---|---|---|---|
| **Odhad $y$** | $0 < \frac{1}{2} < 1$<br>$2^0 < 2^{\frac{1}{2}} < 2^1$<br>$1 < 2^{\frac{1}{2}} < 2$ | $3 < \pi < 4$<br>$2^3 < 2^\pi < 2^4$<br>$8 < 2^\pi < 16$ | $-2 < -\sqrt{3} < -1$<br>$2^{-2} < 2^{-\sqrt{3}} < 2^{-1}$<br>$\frac{1}{4} < 2^{-\sqrt{3}} < \frac{1}{2}$ |
| $y$ | $2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2} \doteq 1,414$ | $2^\pi \doteq 8,825$ | $2^{-\sqrt{3}} \doteq 0,301$ |

Získané body jsou v grafu znázorněny oranžově.




Exponenciální funkce je nejen rostoucí, ale dokonce nejrychleji rostoucí funkcí. Zkusíme si porovnat funkce $y = x^{100}$ (ta roste hodně rychle) a $y = 2^x$ (obyčejná exponenciální funkce).

Nejdříve si nakreslíme grafy $y = x^{100}$ a $y = 2^x$ :




Z grafů nevypadá, že by funkce $y = 2^x$ měla moc šancí $y = x^{100}$ předběhnout.

Zkusíme počítat hodnoty:

$x = 10$

| | | |
|---|---|---|
| $y = x^{100}$ | $10^{100}$ | 100000000000000000000000000000000000000000000000000<br>00000000000000000000000000000000000000000000000000 |
| $y = 2^x$ | $2^{10}$ | 1024 |

Zdá se to jasné, $y = 2^x$ nemá šanci.

$x = 100$

| | | |
|---|---|---|
| $y = x^{100}$ | $100^{100}$ | 100000000000000000000000000000000000000000000000000<br>000000000000000000000000000000000000000000000000000<br>000000000000000000000000000000000000000000000000000<br>000000000000000000000000000000000000000000000000 |
| $y = 2^x$ | $2^{100}$ | 1267650600228229401496703205376 |

$x = 500$

| | | |
|---|---|---|
| $y = x^{100}$ | $500^{100}$ | 7888609052210118054117285652827862296732064351090230<br>0477027893066406250000000000000000000000000000000000<br>0000000000000000000000000000000000000000000000000000<br>0000000000000000000000000000000000000000000000000000 |

| | | |
|---|---|---|
| | | 0000000000000000000000000000000000000000000000000000<br>0000000000 |
| $y=2^x$ | $2^{500}$ | 3273390607896141870013189696827599152216642046043064<br>7894832913680961337964046745548832700923259041571508<br>86684127560071009217256545885393053328527589376 |

Že by se funkce $y=2^x$ přece jenom chytla?

$x=1000$

| | | |
|---|---|---|
| $y=x^{100}$ | $1000^{100}$ | 1000000000000000000000000000000000000000000000000000<br>0000000000000000000000000000000000000000000000000000<br>0000000000000000000000000000000000000000000000000000<br>0000000000000000000000000000000000000000000000000000<br>0000000000000000000000000000000000000000000000000000<br>00000000000000000000000000000000000000000 |
| $y=2^x$ | $2^{1000}$ | 1071508607186267320948425049060001810561404811705533<br>6074437503883703510511249361224931983788156958581275<br>9467291755314682518714528569231404359845775746985748<br>0393456777482423098542107460506237114187795418215304<br>6474983581941267398767559165543946077062914571196477<br>686542167660429831652624386837205668069376 |

Hodnota funkce $y=2^x$ je už více než 10x větší!!!

$x=2000$

| | | |
|---|---|---|
| $y=x^{100}$ | $2000^{100}$ | 1267650600228229401496703205376000000000000000000000<br>0000000000000000000000000000000000000000000000000000<br>0000000000000000000000000000000000000000000000000000<br>0000000000000000000000000000000000000000000000000000<br>0000000000000000000000000000000000000000000000000000<br>0000000000000000000000000000000000000000000000000000<br>0000000000000000000 |
| $y=2^x$ | $2^{2000}$ | 1148130695274254524232833201177681984022317702088695<br>2004776427368257662613923703138566594863165062699184<br>4596463898746277344711896086305533142593135616665318<br>5391299891453122800006887791482400448714289269900634<br>8624478161546364638836394731702604046635397090499655<br>8162398808944629605623311649536164221970332681344168<br>9089844585056023794848079140589009347765004290027167<br>0662583052200813223628129176126788331720659899539641<br>8127021779858404042159853183251540889433902091920554<br>9577835896720391600819572166305827553804255837260155<br>2834878641943205450891527578388262517543552880082284<br>2770817965453762184851149029376 |

Z funkce $y=x^{100}$ se stává outsider.

$x=10000$

| | | |
|---|---|---|
| $y=x^{100}$ | $10000^{100}$ | 1000000000000000000000000000000000000000000000000000<br>0000000000000000000000000000000000000000000000000000<br>0000000000000000000000000000000000000000000000000000<br>0000000000000000000000000000000000000000000000000000<br>0000000000000000000000000000000000000000000000000000<br>0000000000000000000000000000000000000000000000000000<br>0000000000000000000000000000000000000000000000000000<br>0000000000000000000000000000000000000 |

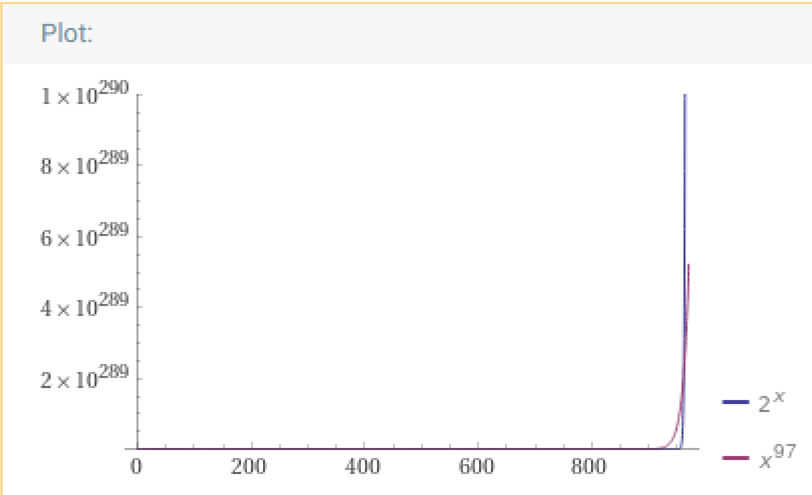
| | | |
|---|---|---|
| $y=2^x$ | $2^{10000}$ | 1995063116880758384883742162683585083823496831886192<br>4548520089498529438830221946631919961684036194597899<br>3311294232091242715564913494137811175937859320963239<br>5785573004679379452676524655126605989552055008691819<br>3311542508608460618104685509074866089624888090489894<br>8380092539416332578506215683094739025569123880652250<br>9664387444104675987162698545322286853816169431577562<br>9640762836880760732228535091641476183956381458969463<br>8994108409605362678210646214273333940365255656495306<br>0314268023496940033593431665145929777327966577560617<br>2582031407994198179607378245683762280037302885487251<br>9008344645814546505579296014148339216157345881392570<br>9537976911927780082695773567444412306201875783632550<br>2728323789270710373802866393031428133241401624195671<br>6905740614196543423246388012488561473052074319922596<br>1179625013099286024170834080760593232016126849228849<br>6255841312844061536738951487114256315111089745514203<br>3138202029316409575964647560104058458415660720449628<br>6701651506192063100418642227590867090057460641785695<br>1911456055068251250406007519842261898059237118054444<br>7880729063952425483392219827074044731623767608466130<br>3377870603980341319713349365462270056316993745550824<br>1780972810983291314403571877524768509857276937926433<br>2215993998768866608083688378380276432827751722736575<br>7274478411229438973381086160742325329197481312019760<br>4178281965697475898164531258434135959862784130128185<br>4062834766490886905210475808826158239619857701224070<br>4433058307586903931960460340497315658320867210591330<br>0903752823415539745394397715257455290510212310947321<br>6107534748257407752739863482984983407569379556466386<br>2187456949927901657210370136443313581721431179139822<br>2983845847334440270964182851005072927748364550578634<br>5011008529878123894739286995408343461588070439591189<br>8581514577917714361969872813145948378320208147498217<br>1858011389071228250905826817436220577475921417653715<br>6877256149045829049924610286300815355833081301019876<br>7585623434353895540917562340084488752616264356864883<br>3519463720377293240094456246923254350400678027273837<br>7553764067268986362410374914109667185570507590981002<br>4678988017827192595338128242195402830275940844895501<br>4676668389697996886241636313376393903373455801407636<br>7418777110553842257394991101864682196965816514851304<br>9422236994771476306915546821768287620036277725772378<br>1365331611196811280792669481887201298643660768551639<br>8605346022978715575179473852463694469230878942659482<br>1700805112032236549628816903573912136833839359175641<br>8733850510970271613915439590991598154654417336311656<br>9360311222499379699992267817323580231118626445752991<br>3575817500819983923628461524988108896023224436217377<br>1618086357015468484058622329792853875623486556440536<br>9626220189635710288123615675125433383032700290976686<br>5056855715750551672751889919412971133769014991618131<br>5171544007728650573189557450920330185304847113818315<br>4073240533190384620840364217637039115506397890007428<br>5367219628090347797453332046836879586858023795221862<br>9120080742819551317948157624448298518461509704888027 |

| | | |
|---|---|---|
| | | 274721574688131594750409732115080498190455803416826949787141316063210686391511681774304792596709376 |

Nezbývá než konstatovat, že funkce $y = x^{100}$ je v porovnání s funkcí $y = 2^x$, co se týká rychlosti růstu, totální loser.

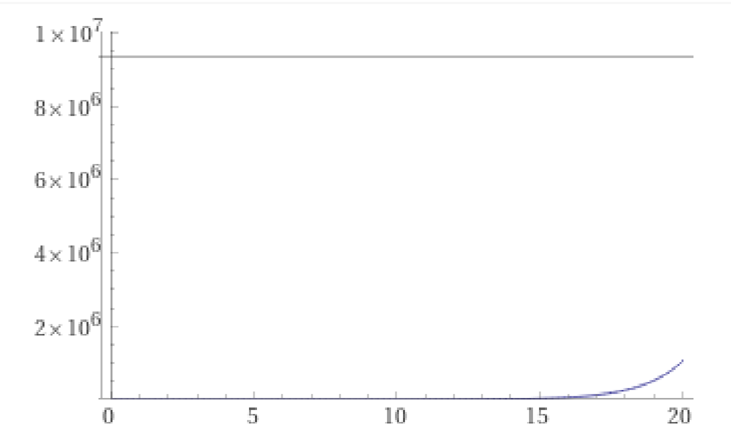
**Pedagogická poznámka:** Souboj funkcí počítáme naživo na www.wolframalpha.com, hodnoty v učebnici jsou spočtené pomocí programu MuPAD.

Průběh souboje si můžeme prohlédnout i na grafu. Bohužel ani na www.wolframalpha.com není možné zobrazovat tak velké hodnoty, proto si ukážeme soubor funkce $y = 2^x$ s funkcí $y = x^{97}$, která má o trochu menší exponent.




Z grafu je vidět, jedna velice zajímavá vlastnost exponenciální funkce – strašně dlouho se „nic neděje“ (modrá čára na obrázku splývá s osou *x*) a najednou exponenciální funkce vystřelí strašně rychle vzhůru.

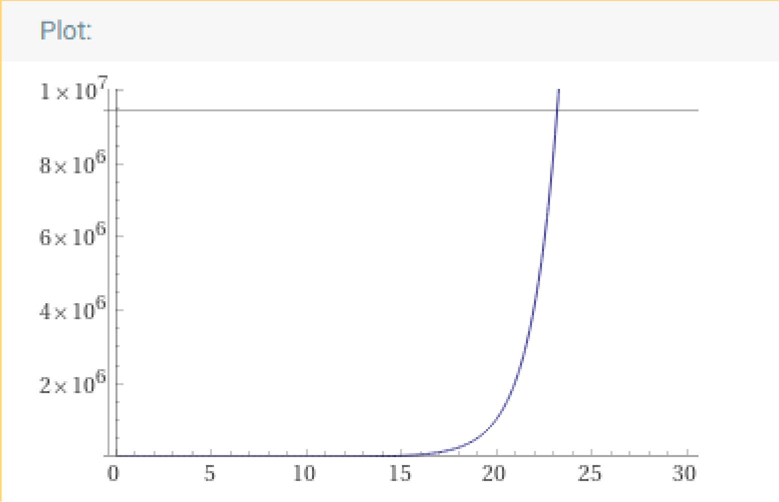
Zkusíme si tuto vlastnost prohlédnout na průběhu funkce $y = 2^x$ pro menší hodnoty *x*.




Na obrázku je graf funkce $y = 2^x$ pro hodnoty $x \le 20$, osa *y* zachycuje hodnoty od 0 do 10 000 000 (přibližný počet obyvatel ČR).

Zkusíme odhadnout, o kolik je nutné prodloužit osu *x*, aby funkce dosáhla hodnoty 10 000 000.

Ačkoliv i po zhlédnutí předchozího grafu odhaduje naprostá většina lidí potřebnou hodnotu $x$ větší než 30, stačí překvapivě málo – už pro $x = 24$ graf vyletí z obrázku nahoru.




Převedeno do aktuálního epidemiologického kontextu. Kdyby se v ČR šířila nějaká choroba, u které by se počet nakažených zdvojnásoboval každý den, ještě 8 dní před nakažením celé populace, by bylo možné nákazu bagatelizovat tím, že vzhledem k počtu obyvatel vlastně žádné nakažené nemáme (křivka na obrázku stále překrývá osu $x$).

**Pedagogická poznámka:** Následující příklad pojímám jako polopísemku. Jsou k dispozici dvě sady zadání (každé pro jedno oddělení). Studenti, kteří za 15 minut nestihnou udělat první dva příklady, mají mínus, studenti, kteří stihnou všechno, mají plus.

**Př. 3:** Nakresli grafy funkcí: a) $y = 2^{x+1}$ b) $y = 2^{x-1}$ c) $y = 2^{x-2} - 1$
d) $y = 2^{x+2} + 1$ e) $y = 2^{1-|x|}$ f) $y = \left|2^x - 2\right|$
g) $y = 2 \cdot 2^{x-1}$ h) $y = \frac{2^{x+1}}{2}$

$y = 2^{x+1}$

Pokud uvažujeme $y = 2^x = f(x)$, platí:

$y = 2^{x+1} = f(x+1)$.

Zvolíme $x$.

Vypočteme $x+1$.

Nakreslíme funkci: $y = f(x+1) = 2^{x+1}$.

$y = 2^{x-1}$

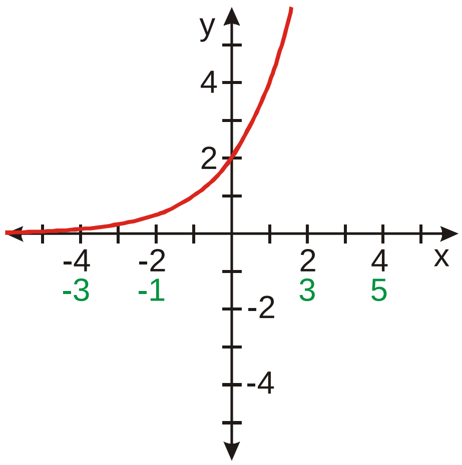
Pokud uvažujeme $y = 2^x = f(x)$, platí:

$y = y = 2^{x-1} = f(x-1)$.

Zvolíme $x$.

Vypočteme $x-1$.

Nakreslíme funkci: $y = f(x-1) = 2^{x-1}$.




$$y=2^{x-2}-1$$

Pokud uvažujeme $y=2^x=f(x)$, platí:

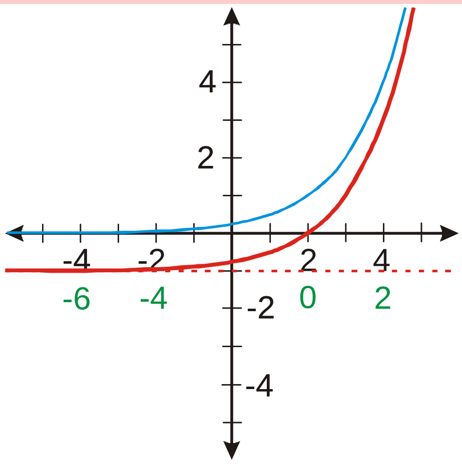
$y=2^{x-2}-1=f(x-2)-1$.

Zvolíme $x$.

Vypočteme $x-2$.

Nakreslíme funkci $y=f(x-2)=2^{x-2}$.

Nakreslíme funkci:
$y=f(x-2)-1=2^{x-2}-1$.




$$y=2^{1-|x|}$$

Pokud uvažujeme $y=2^x=f(x)$, platí:

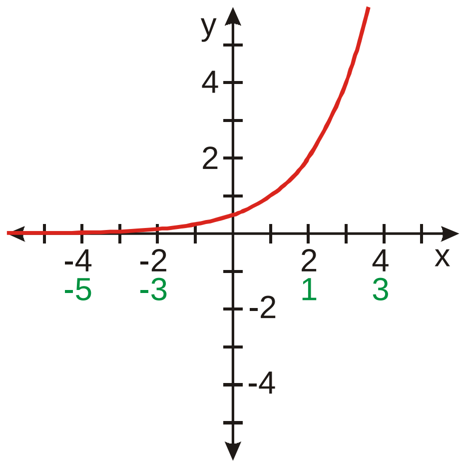
$y=2^{1-|x|}=f(1-|x|)$.

Zvolíme $x$.

Vypočteme $|x|$.

Vypočteme $1-|x|$.

Nakreslíme funkci $y=f(1-|x|)=2^{1-|x|}$.




$$y=2^{x+2}+1$$

Pokud uvažujeme $y=2^x=f(x)$, platí:

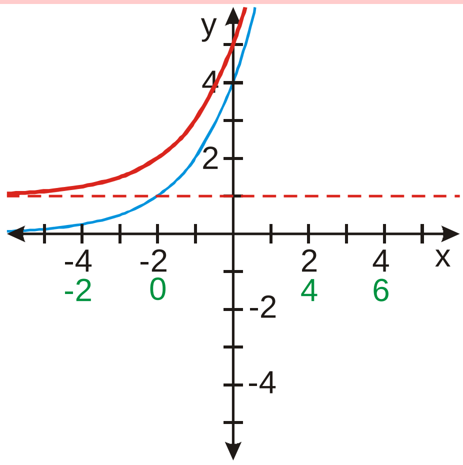
$y=y=2^{x+2}+1=f(x+2)+1$.

Zvolíme $x$.

Vypočteme $x+2$.

Nakreslíme funkci $y=f(x+2)=2^{x+2}$.

Nakreslíme funkci:
$y=f(x+2)+1=2^{x+2}+1$.




$$y=\left|2^x-2\right|$$

Pokud uvažujeme $y=2^x=f(x)$, platí:

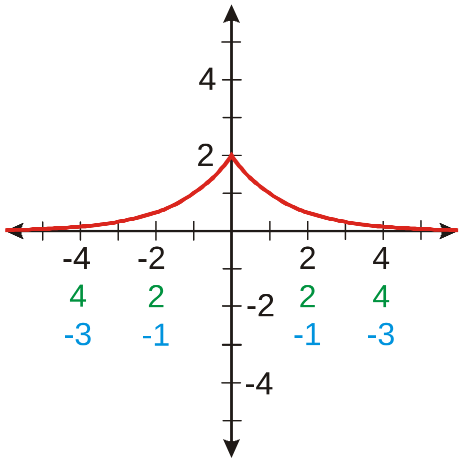
$y=\left|2^x-2\right|=\left|f(x)-2\right|$.

Zvolíme $x$.

Nakreslíme funkci $y=f(x)=2^x$.

Nakreslíme funkci $y=f(x)-2=2^x-2$.

Nakreslíme funkci $y=\left|f(x)-2\right|=\left|2^x-2\right|$.




$$y = 2 \cdot 2^{x-1}$$

Pokud uvažujeme $y = 2^x = f(x)$, platí:

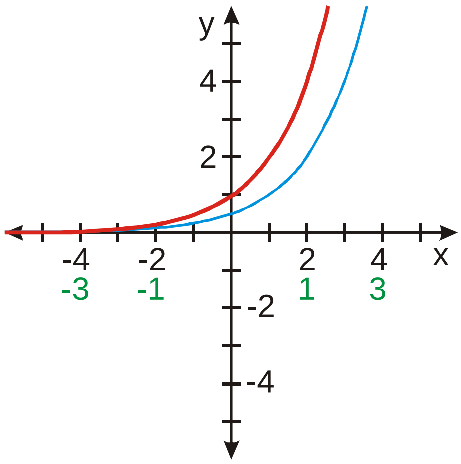
$y = 2 \cdot 2^{x-1} = 2f(x-1)$.

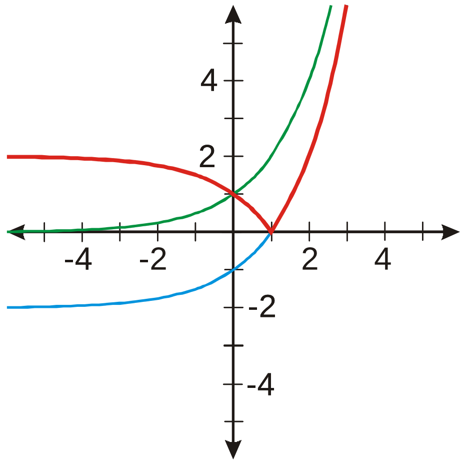
Zvolíme $x$.

Vypočteme $x-1$.

Nakreslíme funkci $y = f(x-1) = 2^{x-1}$.

Nakreslíme funkci $y = 2f(x-1) = 2 \cdot 2^{x-1}$.




$$y = \frac{2^{x+1}}{2}$$

Pokud uvažujeme $y = 2^x = f(x)$, platí:

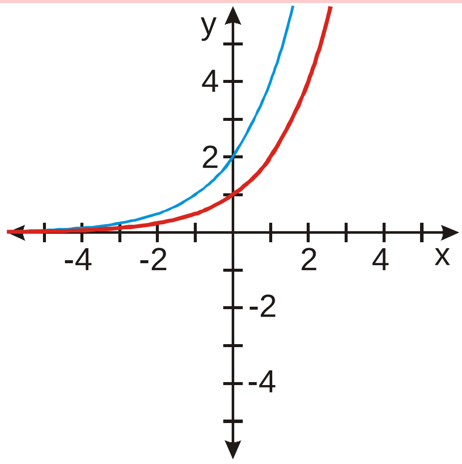
$y = \frac{2^{x+1}}{2} = \frac{1}{2} f(x+1)$.

Zvolíme $x$.

Vypočteme $x+1$.

Nakreslíme funkci $y = f(x+1) = 2^{x+1}$.

Nakreslíme funkci $y = \frac{1}{2} f(x+1) = \frac{2^{x+1}}{2}$.




**Př. 4:** Petáková:
strana 30/cvičení 66 $f_3$, $f_4$, $f_6$
strana 30/cvičení 67 $g_1$, $g_2$

**Shrnutí:** Funkce s neznámou v exponentu se nazývá exponenciální a je nejrychleji rostoucí funkcí.